**Matematica finanziaria: svolgimento prova di esame del 14 febbraio 2006**

1. **[6 punti cleai, 6 punti altri]** Si possiede un capitale di 1400€ e lo si vuole impiegare per 2 anni. Supponendo che eventuali ricavi intermedi vengano reinvestiti con una legge di interesse composto al 5% semestrale, calcolare il montante nelle seguenti due ipotesi di investimento:

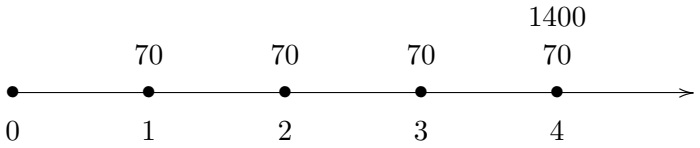
   (a) regime di interesse composto al tasso d'interesse effettivo del 10% annuo;

   (b) regime di interesse composto al tasso d'interesse nominale del 10% annuo, pagabile ogni 6 mesi.

   **Svolgimento.** Il punto (a) è immediato. In regime d'interesse composto con un tasso d'interesse effettivo non ci sono ricavi intermedi da reinvestire, pertanto il montante è

   $$M_{\mathrm{a}} = 1400(1+0.1)^2 = 1694.$$

   Nel caso (b), invece, si ha a che fare con un tasso d'interesse *nominale*: 10% di 1400€ significa 140€ "all'anno", e pagabili ogni 6 mesi significa che ogni 6 mesi si incasserà una cedola di 70€. Alla fine del periodo d'investimento, inoltre, ci verrà restituito il capitale iniziale di 1400€. Il grafico di questo investimento è dunque

   Notare che conviene usare come unità di misura il semestre, visto che il tasso di reinvestimento è semestrale e anche le cedole vengono incassate semestralmente. Due anni corrispondono ovviamente a quattro semestri.

   I ricavi intermedi (le cedole semestrali di 70€) vanno reinvestiti tramite la legge $r(t) = (1+0.05)^t$ (dove $t$ misura il tempo, come già detto, in semestri). La prima cedola essendo capitalizzata per 3 semestri, fornirà un montante di $70 \cdot (1+0.05)^3$, la seconda fornirà un montante di $70 \cdot (1+0.05)^2$, e così via. Il montante finale sarà

   $$\begin{aligned} M_{\mathrm{b}} &= 70 \cdot (1+0.05)^3 + 70 \cdot (1+0.05)^2 + 70 \cdot (1+0.05) + 70 + 1400 \\ &= 70 \cdot \frac{1.05^4 - 1}{0.05} + 1400 = 1701.71. \end{aligned}$$

   ■

2. **[7 punti cleai, 6 punti altri]** Sia data la legge finanziaria in due variabili

   $$r(x,y) = 1.1^{0.2(y^2-x^2)}.$$

   Calcolare la forza di interesse, dire se si tratta di una legge finanziaria scindibile e calcolare il montante di proseguimento $M(2,5)$ al quinto anno di un capitale (investito al tempo 0) che al secondo anno risulta di 10€.

   **Svolgimento.** Abbiamo:

   $$r(x,y) = 1.1^{0.2(y^2-x^2)} \Rightarrow \delta(x,y) = \frac{r_y(x,y)}{r(x,y)} = \frac{0.4y \cdot 1.1^{0.2(y^2-x^2)} \ln 1.1}{1.1^{0.2(y^2-x^2)}} = 0.4y \cdot \ln 1.1.$$

   Poiché la forza di interesse non dipende da $x$, la legge in questione è scindibile. Il montante di proseguimento si può allora calcolare "senza passare dal via":

   $$M(2,5) = 10 \cdot 1.1^{0.2(25-4)} = 10 \cdot 1.1^{4.2} = 14.9228.$$

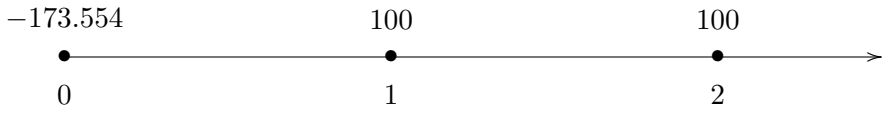
   Per controllare possiamo calcolare il montante di proseguimento passando dal tempo 0:

   $$M(2,5) = \frac{10}{r(0,2)} \cdot r(0,5) = \frac{10}{1.1^{0.8}} \cdot 1.1^5 = 14.9228.$$

   ■

3. **[4 punti cleai, 4 punti altri]** Calcolare il tasso mensile di rendimento dell'operazione finanziaria consistente nell'acquistare due cedole da 100€ mensili posticipate al prezzo di 173.554€.

**Svolgimento.** Il grafico dell'operazione finanziaria consistente nell'acquisto delle due cedole è




Posto $\nu = 1/(1+i)$, il $\text{REA}(i)$ di questa operazione finanziaria è

$$\text{REA}(i) = -173.554 + 100\nu + 100\nu^2$$

L'equazione che permette di determinare il tasso mensile di rendimento $i$ è $\text{REA}(i) = 0$, cioè

$$-173.554 + 100\nu + 100\nu^2 = 0 \iff \nu = \frac{-50 + \sqrt{50^2 + 100 \cdot 173.554}}{100} = \frac{-50 + \sqrt{19855.4}}{100}$$

Notare che abbiamo scartato la soluzione negativa, in quanto priva di significato finanziario. La soluzione scelta è sicuramente positiva, per il teorema di Cartesio.

Il tasso mensile di rendimento $i$ è quindi

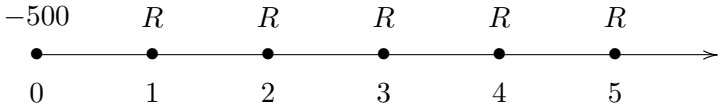
$$i = \frac{1}{\nu} - 1 = \frac{100}{-50 + \sqrt{19855.4}} - 1 \simeq 0.1$$

■

4. **[4 punti cleai, 4 punti altri]** Si consideri un prestito di 500€ rimborsabile in 5 anni con rata costante annuale e posticipata. Di che tipo di ammortamento si tratta? Si determini la rata in modo che il rendimento effettivo risulti del 10% e si scriva il piano di ammortamento.

**Svolgimento.** Il tipo di ammortamento è francese.

Diciamo $R$ la rata incognita del prestito. Il grafico del prestito dal punto di vista del creditore è




e il rendimento effettivo $i$ del prestito si trova risolvendo l'equazione in $\nu = 1/(1+i)$

$$-500 + R\frac{\nu(1-\nu^5)}{1-\nu} = 0.$$

Se avessimo $\nu$, questa sarebbe un'equazione facilissima da risolvere per trovare $R$. Ma noi abbiamo $\nu$! Infatti sappiamo (anzi, vogliamo) che $i = 0.1$, e dunque $\nu = 1/1.1$. L'equazione è allora:

$$-500 + R\frac{\frac{1}{1.1}(1-\frac{1}{1.1^5})}{1-\frac{1}{1.1}} = 0 \iff R = 500\frac{0.1}{1-\frac{1}{1.1^5}} = 131.899$$

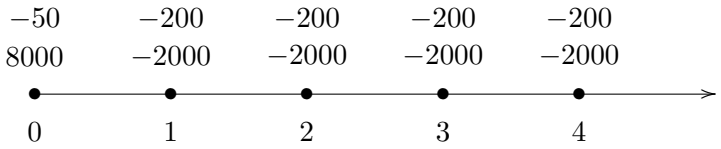
Il piano di ammortamento è allora:

| anno | QC | QI | Rata | DR |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 81.899 | 50 | 131.899 | 418.101 |
| 2 | 90.0889 | 41.8101 | 131.899 | 328.012 |
| 3 | 99.0978 | 32.8012 | 131.899 | 228.914 |
| 4 | 109.008 | 22.8914 | 131.899 | 119.907 |
| 5 | 119.907 | 11.9907 | 131.899 | 0 |

■

5. **[5 punti cleai, 4 punti altri]** Calcolare (al meglio di due cifre decimali) il TAEG di un finanziamento di 8000€ in 4 rate annuali da 2000€, supponendo le spese accessorie pari a 50€ per l'apertura del finanziamento e il 10% di diritti di riscossione su ogni rata.

**Svolgimento.** Questo finanziamento si sintetizza, dal punto di vista del debitore, nel seguente grafico:




(1)

Il TAEG è il tasso interno di rendimento $i$ di (1) (che esiste perchè l'operazione è un finanziamento), e si trova risolvendo l'equazione in $\nu = 1/(1+i)$

$$f(\nu) = 7950 - 2200\nu - 2200\nu^2 - 2200\nu^3 - 2200\nu^4 = 0.$$

Risolviamo quest'equazione di grado 4 per via numerica, con il metodo della bisezione.

$$f(0.9) = 1140.78 > 0, f(0.99) = -632.189 < 0, f(0.95) = 196.361 > 0$$
$$f(0.96) = -4.50163 < 0, f(0.955) = 96.4434 > 0$$

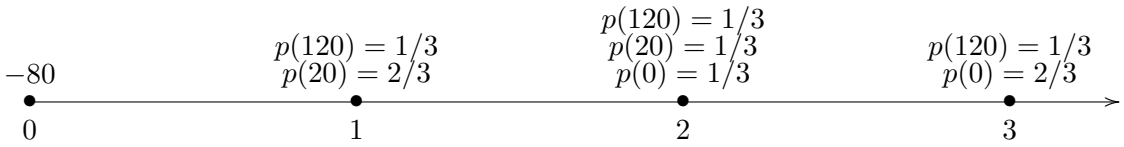
da cui ne deduciamo che $\nu \in (0.955, 0.96)$, e possiamo approssimarlo al meglio di due cifre decimali con 0.96. Infine, ricaviamo il TAEG:

$$\text{TAEG} = \frac{1}{\nu} - 1 = 0.04.$$

■

6. **[4 punti cleai, 4 punti altri]** Si acquistano delle obbligazioni. Il prezzo è 80€, il valore nominale 100€. Le cedole sono di 20€ (annue e posticipate). Le obbligazioni verranno rimborsate progressivamente in tre anni (1/3 alla fine di ciascun anno). Calcolare il tasso di rendimento effettivo per un'obbligazione rimborsata dopo 2 anni. Calcolare poi il tasso di rendimento medio.

**Svolgimento.** L'acquisto di un'obbligazione si sintetizza nel seguente grafico.



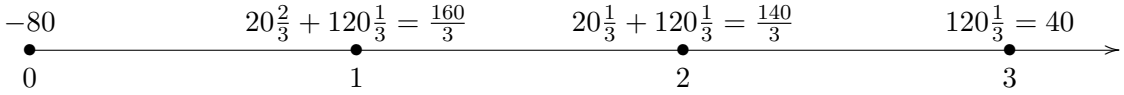

Se il titolo viene rimborsato al secondo anno, il suo rendimento effettivo $i_2$ si trova risolvendo l'equazione

$$-80 + 20\nu + 120\nu^2 = 0$$

e dunque

$$i_2 = \frac{12}{-1+\sqrt{97}} - 1 = 0.356107.$$

Per il tasso di rendimento medio $i_{\text{m}}$ dobbiamo calcolare i valori medi delle cedole che riscuoteremo ogni anno. L'operazione finanziaria risultante è




Il rendimento medio si trova allora risolvendo l'equazione

$$-80 + \frac{160}{3}\nu + \frac{140}{3}\nu^2 + 40\nu^3 = 0$$

che fornisce, sempre per via numerica,

$$i_{\text{m}} = 0.364.$$

■

7. **[5 punti cleai, 4 punti altri]** I titoli $A, B, C, D$ dati dalla tabella 1 sono venduti in maniera tale da produrre $\text{YTM} = 0.1$. Calcolare la durata media finanziaria per ciascuno di essi.

   **Svolgimento.** Dobbiamo calcolare la DMF per ciascuno dei 4 titoli in tabella 1. Per i titoli senza cedole (il $C$ e il $D$) la risposta è immediata:

$$\text{DMF}(C) = 3, \text{DMF}(D) = 1.$$

   Per $A$ e $B$, dobbiamo prima di tutto scrivere le loro funzioni REA-forza di interesse:

$$\text{REA}_A(\delta) = 80e^{-\delta} + 80e^{-2\delta} + 1080e^{-3\delta}$$
$$\text{REA}_B(\delta) = 70e^{-\delta} + 70e^{-2\delta} + 1080e^{-3\delta}$$

   Le loro derivate sono allora:

$$\text{REA}'_A(\delta) = -80e^{-\delta} - 160e^{-2\delta} - 3240e^{-3\delta}$$
$$\text{REA}'_B(\delta) = -70e^{-\delta} - 140e^{-2\delta} - 3240e^{-3\delta}$$

   Ricordando allora che $\text{YTM} = 0.1$ implica $\delta = \ln 1.1$, si ottiene

$$\text{REA}_A(0.1) = 80e^{-\ln 1.1} + 80e^{-2\cdot\ln 1.1} + 1080e^{-3\cdot\ln 1.1} = 950.263$$
$$\text{REA}_B(0.1) = 70e^{-\ln 1.1} + 70e^{-2\cdot\ln 1.1} + 1080e^{-3\cdot\ln 1.1} = 932.908$$
$$\text{REA}'_A(0.1) = -80e^{-\ln 1.1} - 160e^{-2\cdot\ln 1.1} - 3240e^{-3\cdot\ln 1.1} = -2639.22$$
$$\text{REA}'_B(0.1) = -70e^{-\ln 1.1} - 140e^{-2\cdot\ln 1.1} - 3240e^{-3\cdot\ln 1.1} = -2613.6$$

   e infine:

$$\text{DMF}(A) = 2.77736, \text{DMF}(B) = 2.80156.$$

   ■

8. **[no cleai, 3 punti altri]** Si assuma una struttura per scadenze descritta dalla tabella 2. Supponendo l'esistenza di un tasso a termine $i(1,3) = 0.05$, si dica se è possibile avere arbitraggi. In caso affermativo, si descriva un arbitraggio.

   **Svolgimento.** Calcoliamo $i(1,3)$ assumendo l'ipotesi di coerenza. Da $r(0,s)r(s,t) = r(0,t)$ otteniamo

$$r(0,1)r(1,3) = r(0,3) \iff r(1,3) = \frac{r(0,3)}{r(0,1)} \iff i(1,3) = \sqrt{\frac{r(0,3)}{r(0,1)}} - 1$$

   da cui (approssimando a due cifre decimali)

$$i(1,3) = \sqrt{\frac{r(0,3)}{r(0,1)}} - 1 = \sqrt{\frac{(1+i(0,3))^3}{1+i(0,1)}} - 1 = \sqrt{\frac{1.07^3}{1.05}} - 1 = 0.08$$

   Dunque la coerenza del mercato imporrebbe un tasso $i(1,3) = 0.08$. Essendo in presenza di un tasso reale $i(1,3) = 0.05$, è possibile costruire il seguente arbitraggio (poiché $0.05 < 0.08$, siamo nel caso $r(0,1)r(1,3) < r(0,3)$):

Tabella 1: Titoli $A, B, C, D$.

| anno di pagamento | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| anno 1 | 80 | 70 | 0 | 1000 |
| anno 2 | 80 | 70 | 0 | 0 |
| anno 3 | 1080 | 1080 | 1000 | 0 |

Tabella 2: Tassi spot rilevati per i prossimi 5 anni.

| anno | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| tasso spot | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |

vendo a pronti un TSC(1)

vendo allo scoperto $r(0,1)$TSC$(1,3)$

acquisto un TSC(3)

Alla fine dell'arbitraggio disporrò di

$$r(0,3) - r(0,1)r(1,3) = 1.07^3 - 1.05 \cdot (1.05)^2 = 0.067418 > 0.$$

■